



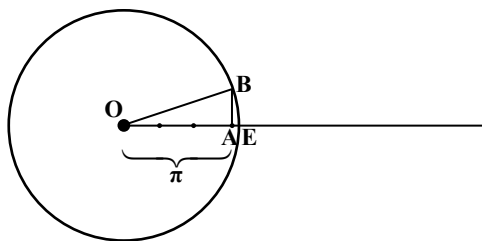
اشاره

«پی» عدد گنگی است که در بیشتر محاسبات ریاضی به نحوی حضور دارد. در هندسه اقلیدسی ثابت شده که نسبت محیط هر دایره به قطر آن عدد ثابتی است. در آن زمان مسئله به رسم پاره خطی انجامید که درازایی برابر با این مقدار ثابت داشته باشد. لیکن از آنجا که رسم چنین خطی ناشدنی است، چاره را در آن دیدند که مقدار تقریبی مناسبی برای آن به دست آورند. در این مقاله، به برخی از این تقریب‌ها و روش رسم پاره خطی به درازای آن‌ها با خط‌کش، پرگار و گونیا خواهیم پرداخت.



عباس قلعه‌پور اقدام
دبیر ریاضی ارومیه

کلیدواژه‌ها: عدد پی، رسم پاره خط، مقدار تقریبی



شکل ۱.

۱. ساده‌ترین تقریب عدد ۳ است که به کمک خط‌کش به سادگی قابل رسم است ($\pi \approx 3$).

۲. تقریب دیگر برای π عدد $\sqrt{10}$ است ($\pi \approx 3.1622$) که تا یک رقم اعشار صحیح است. این تقریب را هندیان باستان (حدود ۸۰۰ سال پیش از میلاد) برای π در نظر می‌گرفتند. برای رسم پاره‌خطی به طول $\sqrt{10}$ به این طریق عمل می‌کنیم: مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه ۱ و ۳ واحد رسم می‌کنیم ($AB=1$ و $OA=3$). طول وتر OB برابر $\sqrt{10}$ است. به مرکز O و شعاع $OB = \sqrt{10}$ دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد OA را در E قطع کند. OE پاره‌خطی با طول تقریبی π است.

۳. تقریبی دیگر برای π ، $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ است ($\pi \approx 3.14622$) که تا دو رقم اعشار صحیح است. مانند بند قبل عمل می‌کنیم. به این صورت که ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه ۱ و ۱

برهان: فرض کنیم شعاع دایره محیطی و a طول ضلع مربع محاط در آن باشد. می‌دانیم: $R = \frac{a}{2} \csc \frac{\pi}{4}$ $(\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha})$ و چون: $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ و چون: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ و $a = R\sqrt{2}$ در ادامه داریم:

$$\begin{aligned} \text{محیط دایره} &= 2\pi R \\ &\approx 2 \times 3.14 \times R \\ &= 2R(3 + 0.14) \\ &\approx 2R(3 + \frac{\sqrt{2}}{10}) \\ \sqrt{2} \approx 1.4 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{10} &\approx 0.14 \\ &= 2R(3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= 2R(3) + \frac{1}{5}(R\sqrt{2}) \\ &= 2R(3) + \frac{1}{5}a \end{aligned}$$

حال از این لم برای رسیدن به مقدار تقریبی دیگری برای π استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2\pi R &\approx 2(2R) + \frac{1}{5}(\sqrt{2}R) \\ \Rightarrow \pi &\approx 3 + \frac{\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

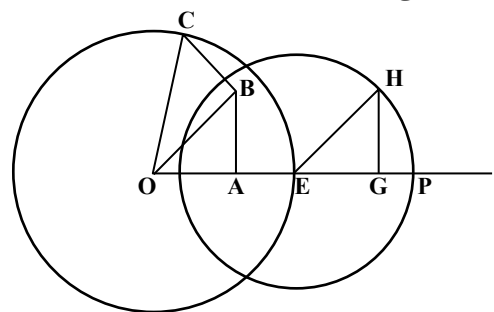
حال برای داشتن پاره‌خطی به درازای $3 + \frac{\sqrt{2}}{10}$ ابتدا مانند بند ۳، پاره‌خطی به طول $\sqrt{2}$ رسم می‌کنیم. سپس مانند بند ۴ یک‌دهم آن را جدا می‌کنیم. در پایان نیز با خط‌کش ۳ واحد به آن می‌افزاییم.

۶. در این روش ابتدا دایره‌ای به مرکز A و شعاع واحد و قطر دلخواه BC از آن رسم می‌کنیم. سپس در نقطه C با گونیا پاره‌خط CE به طول ۳ واحد را بر دایره مماس می‌کنیم. حال یک زاویه 30° درجه طوری رسم می‌کنیم^۲ که رأس آن A و AB یک ضلع آن باشد. نقطه تلاقی ضلع دیگر زاویه 30° درجه و مماس بر دایره در نقطه D را B می‌نامیم.

پاره‌خط DE به درازای تقریبی π است، زیرا همان‌گونه که در شکل ۴ مشهود است، داریم:

$$\begin{aligned} \tan \angle A &= \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB \cdot \tan \angle A \\ \Rightarrow BD &= 1 \times \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

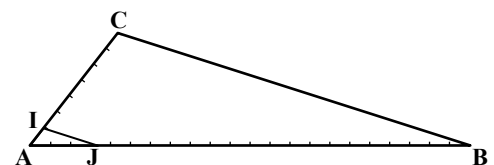
واحد رسم می‌کنیم ($AB=1$ و $OA=1$). طول وتر $OB = \sqrt{2}$ است. حال در نقطه B با گونیا (یا خط‌کش و پرگار) عمودی بر OB رسم و روی آن BC را به طول ۱ واحد جدا می‌کنیم. در مثلث OBC طول وتر $OC = \sqrt{3}$ است. حال به مرکز O و شعاع OC دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد OA را در E قطع کند. سپس همانند شکل ۲، مثلث قائم‌الزاویه EGH به اضلاع قائمه $EG=1$ و $GH=1$ را بنا می‌کنیم. طول وتر $EH = \sqrt{2}$ است. به مرکز E و شعاع EH دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد OA را در P قطع کند. OP پاره‌خطی با طول تقریبی π است.



شکل ۲.

۴. یکی دیگر از تقریب‌های π ، کسر $\frac{22}{7}$ است ($\pi = \frac{22}{7} = 3.14285$) که تا دو رقم اعشار صحیح است. برای ترسیم آن ابتدا با خط‌کش پاره‌خط AB را به درازای ۲۲ واحد و سپس از ابتدای این پاره‌خط AC را به طول ۷ واحد و با زاویه‌ای دلخواه رسم می‌کنیم. AC را با خط‌کش به ۷ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. از نقطه C به نقطه B وصل و سپس از نقطه I ($AI=1$) به موازات پاره‌خط CB ، پاره‌خط IJ را می‌کشیم. AJ همان پاره‌خط موردنظر با طول تقریبی π است. بررسی درستی این مطلب به کمک قضیه تالس و شکل ۳ در زیر آورده شده است:

$$IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{AJ}{AB} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{AJ}{22} \Rightarrow AJ = \frac{22}{7}$$



شکل ۳.

۵. در این قسمت ابتدا لمی را بیان و اثبات می‌کنیم. **لم:** محیط هر دایره به‌طور تقریبی با قطر دایره به اضافه یک پنجم طول ضلع مربع محاطی آن برابر است.

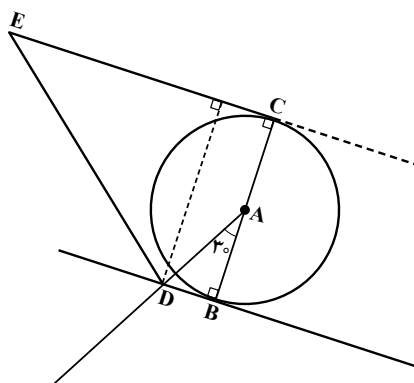
مقدار به‌دست آمده را با π مقایسه کنید. وجوه جانبی هرم بزرگ با سطح افقی زمین زاویه $51/58^\circ$ درجه می‌سازند. تنازعات این زاویه را که در واقع شیب وجوه جانبی هرم است، حساب کنید و مقدار به‌دست آمده را با $\frac{4}{\pi}$ مقایسه کنید.

$$DE^2 = BC^2 + (CE - BD)^2 = 2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= 4 + \left(9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{40 - 6\sqrt{3}}{3} \approx 9/8692317$$

$$\Rightarrow DE \approx 3/14152333$$

که این تقریب برای π تا چهار رقم اعشار صحیح است.



شکل ۴.

تمرین: پاره‌خطی را رسم کنید که درازای آن $3 + \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد.

تحقیق

ردپای عدد (پی) در هرم بزرگ مصر

اهرام ثلاثه مصر از عجایب هفتگانه دنیای قدیم هستند. از این سه هرم، قدمت هرم بزرگ به ۲۵۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد. طول ضلع مربعی که هرم بزرگ روی آن بنا شده (قاعده هرم) $230/4$ متر و ارتفاع هرم $146/5$ متر است. نسبت $\frac{230/4}{146/5}$ را محاسبه و

*پی‌نوشت‌ها

۱. تقریب متداول برای جذر در قرون وسطا به‌صورت $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a+1}$ بود که برای $\sqrt{10}$ با اختیار $3^2 + 1 = 10$ به‌صورت $\sqrt{10} \approx 3 + \frac{1}{6} = 3.1666$ در می‌آید. تقریب بهتر برای جذر از تعریف مشتق به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

حال با اختیار $x = a^2$ ، $f(x) = \sqrt{x}$ و $\Delta x = b$ خواهیم داشت:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b} = f(a^2 + b) \approx \sqrt{a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2}}b \Rightarrow \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

۲. اگر a طول ضلع‌های مثلثی منتظم محاطی و R شعاع دایره محیطی باشد، رابطه $R = \frac{a}{\sqrt{3}} \csc \frac{\pi}{n}$ به سادگی قابل اثبات است.

۳. برای رسم زاویه 30° درجه با خط‌کش و پرگار ابتدا پاره‌خط دلخواهی رسم می‌کنیم. سپس دهانه پرگار را به اندازه آن پاره‌خط باز می‌کنیم و به مرکز دو سر پاره‌خط دو دایره هم‌اندازه می‌زنیم. یکی از نقاط تلاقی دایره‌ها را به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم. مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع و هر سه زاویه آن 60° درجه است. با خط‌کش و پرگار نیم‌ساز یکی از آن‌ها را رسم می‌کنیم تا دوتا زاویه 30° درجه داشته باشیم.

*منابع

۱. بهاری‌پور، مهرداد. (بی‌تا). رسم تقریبی پاره‌خطی به اندازه پی. هشتمین همایش ملی ریاضی. دانشگاه پیام نور، خرم‌آباد.
2. lemesurier, peter (1977). the great pyramid Decoded.
3. meisner, Gary (2012). phi, pi and the Great Pyramid of Egypt at Giza.

در چهارضلعی ABCD، $AD=4$ ، $AB=6$ ، $OC=5$ و $AO=3$ محل تلاقی قطر هاست. در ضمن: $\angle BAC = \angle CAD$ طول ضلع BC کدام است؟

پرسش‌های بیکار جو! ۲

الف) $2\sqrt{10}$ ☐

ب) ۶ ☐

ج) ۷ ☐

د) $2\sqrt{11}$ ☐

ه) $3\sqrt{5}$ ☐